1.
① $(3,9)$
② $\dfrac{37-\sqrt{37}}{4}$
【解説】
点 $\mathrm{P}(x,y)$において 2 次曲線と円は接線を共有し，その接線に垂直な直線の傾きが$-\frac{1}{6}$であるから，接線の傾きは 6 である。2 次曲線の方程式が$y=x^2$であるから

$$2x=6 \Leftrightarrow x=3$$

したがって

$$(x,y)=(3,9)$$

原点$(0,0)$，円の中心(a,b)をそれぞれ O，C とすると，点 C は第 1 象限にあり，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$はベクトル$\vec{d}=(6,-1)$と同じ向きで大きさが b となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+b\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \Leftrightarrow (a,b)=(3,9)+\frac{b}{\sqrt{37}}(6,-1)$$

y 成分を比較して

$$b=9-\frac{b}{\sqrt{37}} \Leftrightarrow b=\frac{37-\sqrt{37}}{4}$$

【注】
2 次曲線と円はただ 1 つの共有点をもち，かつ円は x 軸に接するので，点 C の x座標が点 P より小さくならないのは，作図すればすぐ分かる。

2.
③ 1
④ n
⑤ $(n-1)!$
【解説】

$$I_n=\int_0^C x^{n-1}e^{-x}dx$$

とすると，

$$I_1=\int_0^C e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^C=-e^{-C}+1$$

したがって

$$f(1)=\lim_{C\to\infty} I_1=1$$

また，

$$I_n=\left[\frac{1}{n}x^n e^{-x}\right]_0^C+\int_0^C \frac{1}{n}x^n e^{-x}dx=\frac{1}{n}c^n e^{-c}+\frac{1}{n}I_{n+1}$$

ゆえに

$$I_{n+1}=nI_n-c^n e^{-c}$$
$$\lim_{C\to\infty} I_{n+1}=\lim_{C\to\infty}(nI_n-c^n e^{-c})$$
$$f(n+1)=nf(n)$$

すなわち

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=n$$

よって，$n \geqq 2$のとき

$$f(n)=\frac{f(n)}{f(n-1)}\cdot\frac{f(n-1)}{f(n-2)}\cdot\frac{f(n-2)}{f(n-3)}\cdot\cdots\cdot\frac{f(2)}{f(1)}\cdot f(1)$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1\cdot 1$$
$$= (n-1)!$$

これは$n=1$のときも成り立つ。

【注】

定義により，極限は有限確定値をとるとみなした。

3.

⑥ $\dfrac{2}{a}-1$

⑦《解釈１》 $-2 \leqq a \leqq 0$ のとき $3a+6$，$a<-2$ のとき $\dfrac{2}{a}(a+2)(a-1)$ 《解釈２》 6

⑧ -2

⑨ -32

【解説】

⑴

$f(x)$が 2 次関数であるから$a<0$で，このとき

$$f(x) = ax^2 + 2(a-2)x + 3a - 2 = a\left(x + \frac{a-2}{a}\right)^2 + \frac{2}{a}(a^2 + a - 2)$$

したがって，頂点の x 座標は

$$-\frac{a-2}{a} = \frac{2}{a} - 1$$

⑵

《解釈１》a を定数とみなす。

(ｉ) $a=0$のとき

$$f(x) = -4x - 2\ (-2 \leqq x \leqq 2)$$

であるから，最大値は$f(-2)=6$

以下では，$a<0$ のときは$\dfrac{2}{a}-1<-1$ であることを用いて場合分けをする。

(ⅱ) $\dfrac{2}{a}-1 \leqq -2$ すなわち $-2 \leqq a < 0$ のとき

最大値は$f(-2) = 3a+6$

(ⅲ) $-2 < \dfrac{2}{a} - 1 (< -1)$すなわち$a<-2$ のとき

最大値は$f\left(\dfrac{2}{a}-1\right) = \dfrac{2}{a}(a^2+a-2) = \dfrac{2}{a}(a+2)(a-1)$

(ⅱ)において，$a=0$とすると$f(-2)=6$となるので，(ｉ)と(ⅱ)はまとめて

$$-2 \leqq a \leqq 0 \text{ のとき最大値} f(-2) = 3a+6$$

とできる。

《解釈２》⑶を見ると，a も変数とみなされる。そこで,《解釈１》の結果に続いて，さらに a を動かす。

$-2 \leqq a \leqq 0$では，$a=0$のとき$3a+6$は最大で，最大値は 6 である。

$a < -2$ では，明らかに $\dfrac{2}{a}(a+2)(a-1) < 0$ である。

したがって，求める最大値は 6 となる。

⑶

(ⅰ) $a = 0$のとき

$f(x) = -4x - 2 = 0$は実数解を持ち，$-2 \leqq x \leqq 2$において，$x = 2$で最小値-10をとる。

(ⅱ) $a < 0$のとき

$f(x) = 0$が実数解をもつので，

$$\frac{2}{a}(a+2)(a-1) \geqq 0$$

いま，$a < 0$なので

$$(a+2)(a-1) \leqq 0$$

よって

$$-2 \leqq a < 0$$

このとき$f(x)$はグラフの軸が$x = -2$より右にはないので，$-2 \leqq x \leqq 2$において，最小値$f(2) = 11a - 10$をとる。

以上より，

$$-2 \leqq a \leqq 0 \text{ のとき最小値} f(2) = 11a - 10$$

となるので，a を動かすと，$a = -2$のとき$11a - 10$は最小で，最小値は-32である。

【注】

「$f(x)$の最大・最小」を考えるとき，変数は xのみとするのが普通である。出題者の意図通りに作問がなされているのか，はなはだ疑問である。

4.

⑩ $100\sqrt[8]{\dfrac{4}{5}}$

⑪ 83

【解説】

⑴

求める値を xとすると，

$$\left(\frac{x}{100}\right)^8 = \frac{80}{100}$$

$x > 0$なので

$$x = 100\sqrt[8]{\frac{4}{5}}$$

⑵
ガラス板の枚数を n とすると，

$$\left(\frac{x}{100}\right)^n \leqq \frac{10}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{n}{8}} \leqq \frac{1}{10}$$

両辺の常用対数をとると，

$$\frac{n}{8}(3\log_{10}2-1) \leqq -1 \Leftrightarrow n \geqq \frac{8}{0.097} = 82.4\cdots$$

これを満たす最小の自然数 n は$n=83$である。

【注】

⑩は%なので，表記を小数に直そうとして戸惑う者がいたかもしれないが，問題自体は典型的。

5.

⑫ $\frac{4}{3}+2i$

⑬ $\frac{3}{4}\pi$

【解説】

⑴

A(α)，B(β)，C(γ)とすると，△ABC の重心は

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{4+6i}{3} = \frac{4}{3}+2i$$

⑵

$$\arg\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta} = \arg\frac{1-5i}{-3+2i} = \arg(-1+i) = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi\ (n\text{は整数})$$

したがって

$$\angle \mathrm{ABC} = \frac{3}{4}\pi$$

【注】

確実に正解したい。

6.

⑭ $r\left(\frac{a}{r}-\frac{q}{r-p}\right)p^{n-1}+\frac{q}{r-p}r^n$

⑮ $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$

⑯ $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{2}{5}$

⑰ $-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}$

⑱ $\frac{2}{5}$

【解説】

⑴

$a_{n+1}=pa_n+qr^n$の両辺を$r^{n+1}(\neq 0)$で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\frac{p}{r}\cdot\frac{a_n}{r^n}+\frac{q}{r}$$

$x=\frac{p}{r}x+\frac{q}{r}$の解$x=\frac{q}{r-p}$を用いて上式を変形すると

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}-\frac{q}{r-p}=\frac{p}{r}\left(\frac{a_n}{r^n}-\frac{q}{r-p}\right)$$

数列$\left\{\frac{a_n}{r^n}-\frac{q}{r-p}\right\}$は初項$\frac{a}{r}-\frac{q}{r-p}$，公比$\frac{p}{r}$の等比数列であるから

$$\frac{a_n}{r^n}-\frac{q}{r-p}=\left(\frac{a}{r}-\frac{q}{r-p}\right)\left(\frac{p}{r}\right)^{n-1}$$

したがって

$$a_n=r\left(\frac{a}{r}-\frac{q}{r-p}\right)p^{n-1}+\frac{q}{r-p}r^n$$

⑵

条件より

$$\begin{cases}A_1=1\\B_1=0\\C_1=0\end{cases},\quad\begin{cases}A_{n+1}=\frac{5}{6}A_n+\frac{1}{3}B_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(a)}\\B_{n+1}=\frac{1}{6}A_n+\frac{1}{3}B_n+\frac{1}{6}C_n\cdots\cdots\text{(b)}\\C_{n+1}=\frac{1}{3}B_n+\frac{5}{6}C_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(c)}\end{cases}$$

したがって

$$(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$$

⑶

(a)，(b)，(c)の両辺をすべて加えると

$$A_{n+1}+B_{n+1}+C_{n+1}=A_n+B_n+C_n=\cdots=A_1+B_1+C_1=1\cdots\cdots(*)$$

(b)より

$$B_{n+1}=\frac{1}{3}B_n+\frac{1}{6}(A_n+C_n)=\frac{1}{3}B_n+\frac{1}{6}(1-B_n)=\frac{1}{6}B_n+\frac{1}{6}$$

$y=\frac{1}{6}y+\frac{1}{6}$ の解 $y=\frac{1}{5}$ を用いて上式を変形すると

$$B_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\left(B_n-\frac{1}{5}\right)$$

数列 $\left\{B_n-\frac{1}{5}\right\}$ は初項 $-\frac{1}{5}$，公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$B_n-\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

したがって

$$B_n=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}$$

ゆえに

$$A_n+C_n=1-B_n=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{4}{5}\cdots\cdots(\mathrm{d})$$

また，(a)，(c)の両辺の差をとると

$$A_{n+1}-C_{n+1}=\frac{5}{6}(A_n-C_n)$$

数列 $\{A_n-C_n\}$ は初項 1，公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列であるから

$$A_n-C_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdots\cdots(\mathrm{e})$$

(d)，(e)より

$$A_n=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{2}{5}$$

$$C_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{2}{5}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}C_n=\frac{2}{5}$$

【注】

$(*)$ は確認のために導いたが，既知として用いても良いだろう。

一般項 A_n，C_n を求めるのに，(1)の結果と一般項 B_n を用いて(a)，(c)からそれぞれ $\{A_n\}$，$\{C_n\}$ の漸化式を立てて解いても良いが，計算量がやや多いので，解説ではあえて誘導を無視した。