[I]

⑴ 72

⑵ 1751

⑶ $76 \leqq x \leqq 86$

⑷ $\dfrac{544}{5}$

⑸ $3\pi + 4$

⑹ $-1 \leqq k \leqq \dfrac{1}{3}$

【解説】

(i)

$$234234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^2$$

と素因数分解できるので，正の約数の個数は

$$2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 72$$

素数の約数とは素因数に他ならないので，3 より大きなものを掛け合わせると

$$n = 7 \times 11 \times 13 = 1001$$

これを 8 で割った商と余りを順次求めると

$$1001 = 1 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 5 \times 8 + 1 = 1751_{(8)}$$

$$\begin{array}{r} 8\underline{)\ 1001} \\ 8\underline{)\ 125} \cdots 1 \\ 8\underline{)\ 15} \cdots 5 \\ 8\underline{)\ 1} \cdots 7 \\ 0 \cdots 1 \end{array}$$

(ii)

テストの中央値が 86 点なので

$$(66 <)x \leqq 86 \leqq x + 10(< 97)$$

これより

$$76 \leqq x \leqq 86$$

この範囲で分散s^2は

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{5}\{97^2 + 86^2 + 66^2 + x^2 + (x+10)^2\} - \left\{\frac{1}{5}(97 + 86 + 66 + x + x + 10)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{25}\{5(97^2 + 86^2 + 66^2 + 2x^2 + 20x + 10^2) - (2x + 259)^2\} \\ &= \frac{1}{25}[\{10x^2 + 100x + 5(97^2 + 86^2 + 66^2 + 10^2)\} - (4x^2 + 1036x + 259^2)] \\ &= \frac{1}{25}\{6x^2 - 936x + 5(97^2 + 86^2 + 66^2 + 10^2) - 259^2\} \\ &= \frac{1}{25}\{6(x - 78)^2 - 6 \cdot 78^2 + 5(97^2 + 86^2 + 66^2 + 10^2) - 259^2\} \end{aligned}$$

ゆえに$x = 78$のとき分散は最小となり，このときの仮平均を 86 とすると，各値との差は

$$11,\ 0,\ -20,\ -8,\ 2$$

となるので，その平均は

$$\frac{1}{5}(11 + 0 - 20 - 8 + 2) = -3$$

したがって，分散s^2は

$$s^2 = \frac{1}{5}\{(11+3)^2 + (0+3)^2 + (-20+3)^2 + (-8+3)^2 + (2+3)^2\} = \frac{544}{5}$$

(iii)

$$f(x) = bx^2 - 2ax - b - 4$$

とおくと，与えられた範囲で常に$f(x) \leqq 0$が成り立つためには

① $b = 0$のとき

$$f(x) = -2ax - 4$$

となるので，

$$f\left(-1 - \sqrt{2}\right) \leqq 0 \text{ かつ} f\left(1 + \sqrt{2}\right) \leqq 0$$

すなわち

$$-2\left(\sqrt{2}-1\right) \leqq a \leqq 2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

② $b>0$のとき

$$f\left(-1-\sqrt{2}\right) \leqq 0 \text{ かつ} f\left(1+\sqrt{2}\right) \leqq 0$$

すなわち

$$b \leqq -a+2\left(\sqrt{2}-1\right) \text{かつ} b \leqq a+2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

③ $b<0$のとき

$$f(x)=b\left(x-\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a^2}{b}-b-4$$

となるので,

(a) $\dfrac{a}{b} \leqq -1-\sqrt{2} \Leftrightarrow b \geqq -\left(\sqrt{2}-1\right)a$のとき

$$f\left(-1-\sqrt{2}\right) \leqq 0 \Leftrightarrow b \leqq -a+2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

(b) $-1-\sqrt{2}<\dfrac{a}{b}<1+\sqrt{2} \Leftrightarrow b<-\left(\sqrt{2}-1\right)a$かつ$b<\left(\sqrt{2}-1\right)a$のとき

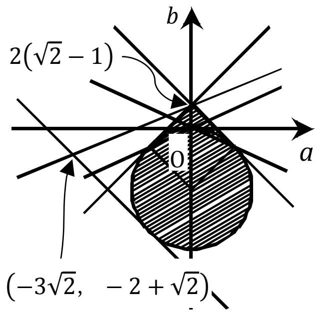
$$f\left(\frac{a}{b}\right) \leqq 0 \Leftrightarrow a^2+(b+2)^2 \leqq 4$$

(c) $\dfrac{a}{b} \geqq 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow b \geqq \left(\sqrt{2}-1\right)a$のとき

$$f\left(1+\sqrt{2}\right) \leqq 0 \Leftrightarrow b \leqq a+2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

これらによって表される領域の面積は

$$\frac{3}{4}\times 2^2\pi+2^2=3\pi+4$$



次に,

$$k=\frac{b+2-\sqrt{2}}{a+3\sqrt{2}} \Leftrightarrow b+2-\sqrt{2}=k\left(a+3\sqrt{2}\right)$$

であるから，k は，ab 平面において，定点$\left(-3\sqrt{2},\ -2+\sqrt{2}\right)$を通る直線の傾きを表す。この直線を l とすると，直線 l が上で求めた領域と共有点をもつような k の範囲を求めればよい。

k が最大のとき，直線 l は点$\left(0,\ 2\left(\sqrt{2}-1\right)\right)$を通るので,

$$k=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)+2-\sqrt{2}}{0+3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$$

k が最小のとき，直線 l は円$a^2+(b+2)^2=4$と接するので,

$$\frac{\left|2+3\sqrt{2}k-2+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=2 \Leftrightarrow \left(3\sqrt{2}k+\sqrt{2}\right)^2=4(k^2+1) \Leftrightarrow k=-1,\ \frac{1}{7}$$

したがって，k のとりうる値の範囲は

$$-1 \leqq k \leqq \frac{1}{3}$$

【注】

計算量を減らす工夫を心がけながら，確実に正解したい。

[Ⅱ]

(1) $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{2}{3}\pi$, $\dfrac{3}{4}\pi$

(2) $\dfrac{-17-7\sqrt{7}}{27}$

(3) $\dfrac{1}{2}$

(4) 4

【解説】
(ⅰ)
《解法１》和→積の公式を用いて手早く因数分解する。

$$f(x)=\cos 3x+\cos x+\cos 2x=2\cos 2x\cos x+\cos 2x=\cos 2x\,(2\cos x+1)$$

$f(x)=0$とすると，

$$\cos 2x=0 \text{ または} \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \text{または} x=\frac{2}{3}\pi$$

したがって

$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{4}\pi$$

《解法２》⑵を見越して，３倍角，２倍角の公式を用いる。

$$\begin{aligned} f(x)&=\cos 3x+\cos 2x+\cos x\\ &=4\cos^3 x-3\cos x+2\cos^2 x-1+\cos x\\ &=4\cos^3 x+2\cos^2 x-2\cos x-1\\ &=(2\cos x+1)(2\cos^2 x-1) \end{aligned}$$

$f(x)=0$とすると，

$$\cos x=-\frac{1}{2},\quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって

$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{3}{4}\pi$$

次に，$\cos x=t$とおくと$-1\leqq t\leqq 1$で，

$$f(x)=4t^3+2t^2-2t-1$$

これを$g(t)$とおくと，

$$g'(t)=12t^2+4t-2=2(6t^2+2t-1)$$

$g'(t)=0$とすると

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{6}$$

これらの値をα，$\beta(\alpha<\beta)$とおくと，$g(t)$の増減は以下のようになる。

t	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$		↗		↘		↗	

ここで，$g(-1)=-1$であり，

$$g(\beta)=(6\beta^2+2\beta-1)\left(\frac{2}{3}\beta+\frac{1}{9}\right)-\frac{14}{9}\beta-\frac{8}{9}=-\frac{2}{9}(7\beta+4)=\frac{-17-7\sqrt{7}}{27}(<-1)$$

したがって，$f(x)$の最小値は

$$\frac{-17-7\sqrt{7}}{27}$$

(ⅱ)
⑶

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1}=\frac{1}{2}$$

⑷
《解法 1》平均値の定理を用いる。
$\cos^2 x$はすべての実数xにおいて微分可能で，

$$(\cos x)'=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$$

平均値の定理により，

$$\cos^2\left(\frac{k}{n}\pi\right)-\cos^2\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)=\left(\frac{k}{n}\pi-\frac{k-1}{n}\pi\right)(-\sin 2c_k)=-\frac{\pi}{n}\sin 2c_k$$

$$\text{かつ}\frac{k-1}{n}\pi < c_k < \frac{k}{n}\pi \cdots\cdots ①$$

を満たすc_kが存在する。このとき

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\cos^2\left(\frac{k}{n}\pi\right)-\cos^2\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\right| = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\frac{\pi}{n}\sin 2c_k\right|$$

となり，この式の値を L とおくと，①から

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\frac{\pi}{n}\sin 2\left(\frac{k}{n}\pi-\frac{\pi}{n}\right)\right| \leqq L \leqq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\frac{\pi}{n}\sin 2\frac{k}{n}\pi\right|$$

$$\text{または}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\frac{\pi}{n}\sin 2\frac{k}{n}\pi\right| \leqq L \leqq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\frac{\pi}{n}\sin 2\left(\frac{k}{n}\pi-\frac{\pi}{n}\right)\right|$$

いずれにせよ

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\frac{\pi}{n}\sin 2\left(\frac{k}{n}\pi-\frac{\pi}{n}\right)\right| = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\frac{\pi}{n}\sin 2\frac{k}{n}\pi\right|$$

が成り立つので，

$$L = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\frac{\pi}{n}\sin 2\frac{k}{n}\pi\right| = \int_0^{2\pi}|\sin 2x|dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx = 2[-\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4$$

《解法 2》三角関数の公式を用いて，平均値の定理の使用を回避する。

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{k}{n}\pi\right)-\cos^2\left(\frac{k-1}{n}\pi\right) &= \frac{1+\cos 2\left(\frac{k}{n}\pi\right)}{2}-\frac{1+\cos 2\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\cos 2\left(\frac{k}{n}\pi\right)-\cos 2\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\right\}\\ &= -\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi\right)\cdot\sin\frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\cos^2\left(\frac{k}{n}\pi\right)-\cos^2\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\right| &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left|\sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi\right)\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right|\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left|\sin\left(2\frac{k}{n}\pi-\frac{\pi}{n}\right)\right|\\ &= 1\cdot\int_0^{2\pi}|\sin 2x|dx\\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx\\ &= 2[-\cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 4\end{aligned}$$

【注】

(ⅰ)は《解法 1》で解くと式変形が二度手間になる。設問全体の流れを見渡してから解答に取りかかると良い。

また，⑶までは確実に正解したい。

⑷は誘導に従えば《解法 1》になるが，類題を解いたことがなければ極限を求めるのに苦労するだろう。そこで《解法 2》のように解き進めることになるが，これは誘導を無視することになるので，やはり難しい。

なお，《解法 2》のはじめの式変形は，まず因数分解してから和→積の公式，次に 2 倍角の公式を用いても同じ結果が得られる。

[Ⅲ]

(ⅰ)

$e^{2x}=X$とおくと，$x>0$より$X>1$である。

$y=f(x)$と$y=g(x)$からyを消去して

$$(X-1)^2=1+\frac{2}{X-X^{-1}}\Leftrightarrow X(X^2-2X-1)=0$$

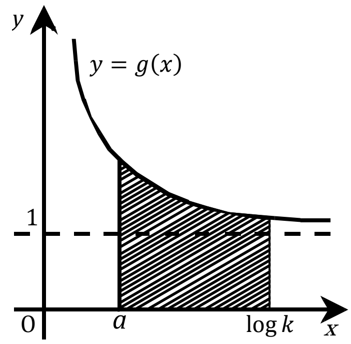
$X>1$であるから，

$$X=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow e^{2x}=1+\sqrt{2}$$

したがって，

$$a=\frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right)\cdots\cdots\text{（答）}$$

(ⅱ)



$x>0$で常に$g(x)>0$であるから，題意を満たす部分の面積をSとすると，

$$S=\int_a^{\log k}\left(1+\frac{2}{e^{2x}-e^{-2x}}\right)dx$$

$e^{2x}=t$とおくと，

$$\begin{aligned}S&=\int_a^{\log k}dx+\int_{1+\sqrt{2}}^{k^2}\frac{2t}{t^2-1}\cdot\frac{1}{2t}dt\\&=\log k-\frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right)+\int_{1+\sqrt{2}}^{k^2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt\\&=\log k-\frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{1+\sqrt{2}}^{k^2}\\&=\frac{1}{2}\log\frac{k^2(k^2-1)}{k^2+1}\end{aligned}$$

いっぽう，

$$S=\log 6-\frac{1}{2}\log 5=\frac{1}{2}\log\frac{36}{5}$$

したがって

$$\frac{k^2(k^2-1)}{k^2+1}=\frac{36}{5}\Leftrightarrow(k-3)(k+3)(5k^2+4)=0$$

$k>0$であるから，

$$k=3\cdots\cdots\text{（答）}$$

【注】

$$g'(x)=-\frac{2}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}\cdot(2e^{2x}+2e^{-2x})=-\frac{4(e^{2x}+e^{-2x})}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}<0$$

また，

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\infty,\quad\lim_{x\to\infty}g(x)=1$$

から，$y=g(x)$の概形は上図のようになるが，面積を求めるだけならば，ここまで調べる必要はない。

とにかく，丁寧な計算と答案作りを心がけたい。